

Применение производной

Производная функции

- Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x (включая точку x).

- **Определение 1.**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

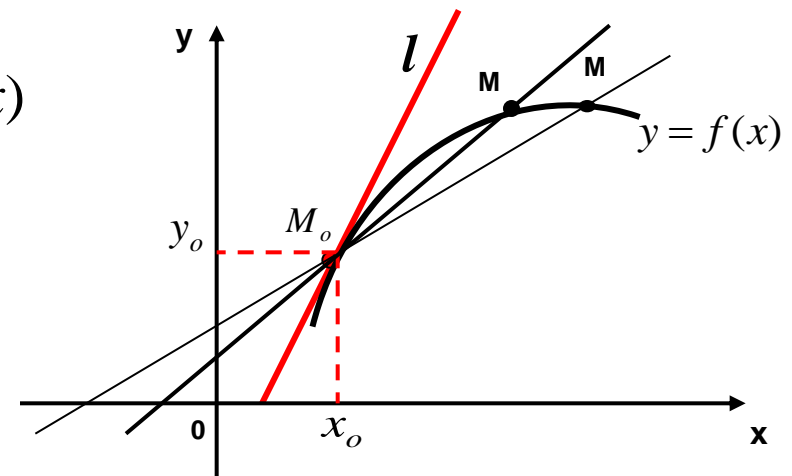


Производной функции $f(x)$ называется предел отношения **приращения функции** к **приращению аргумента**, когда **приращение аргумента** стремится к нулю.

- **Определение 2.**

Касательной прямой l к графику функции $y = f(x)$

в точке x_0 называется **предельное положение секущей** M_0M , когда $M \rightarrow M_0$

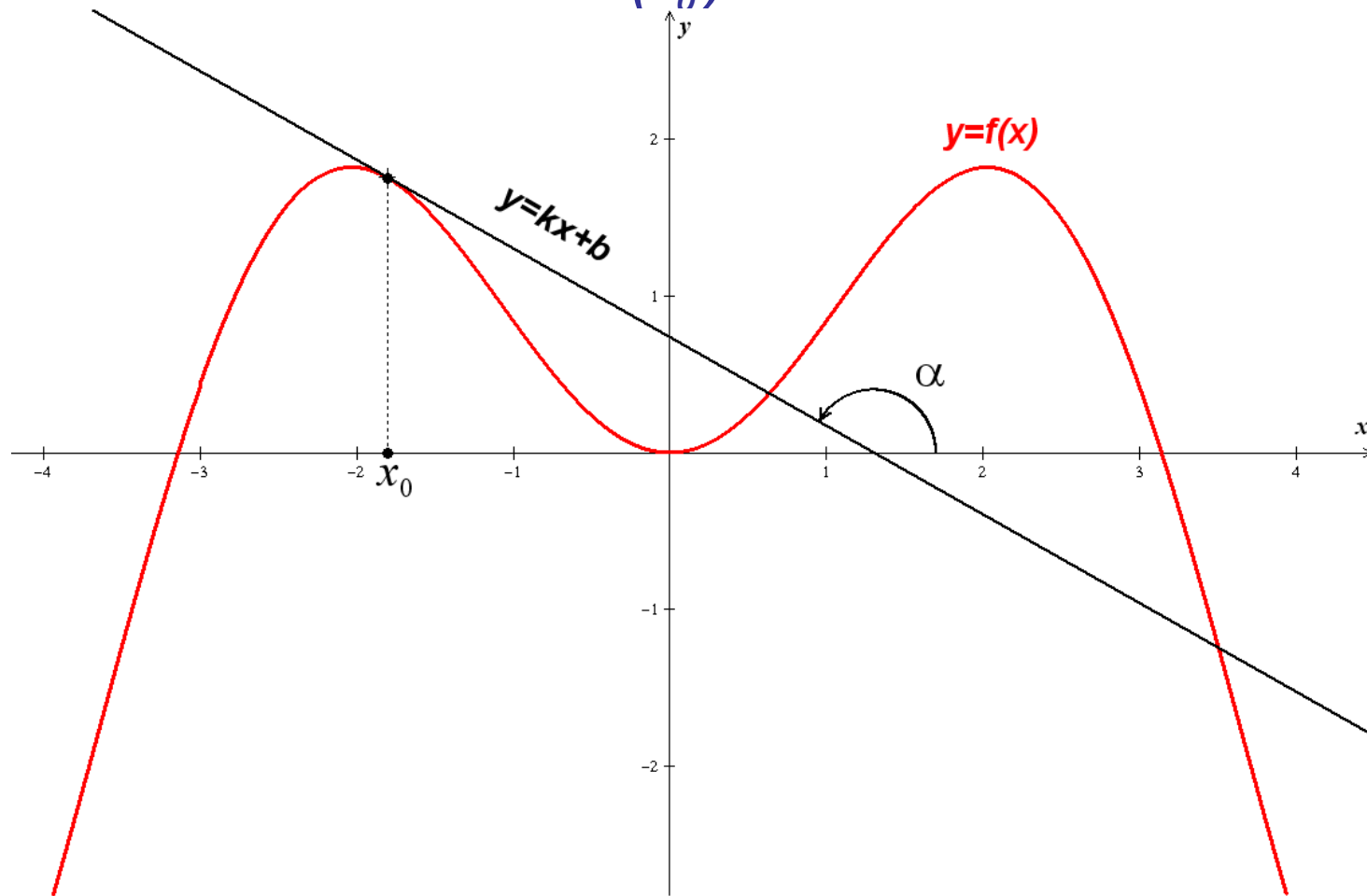


Геометрический смысл производной

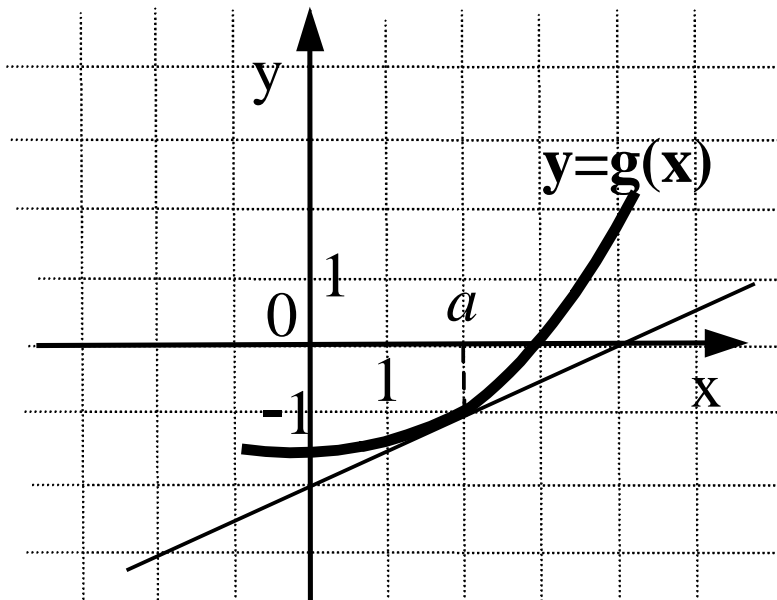
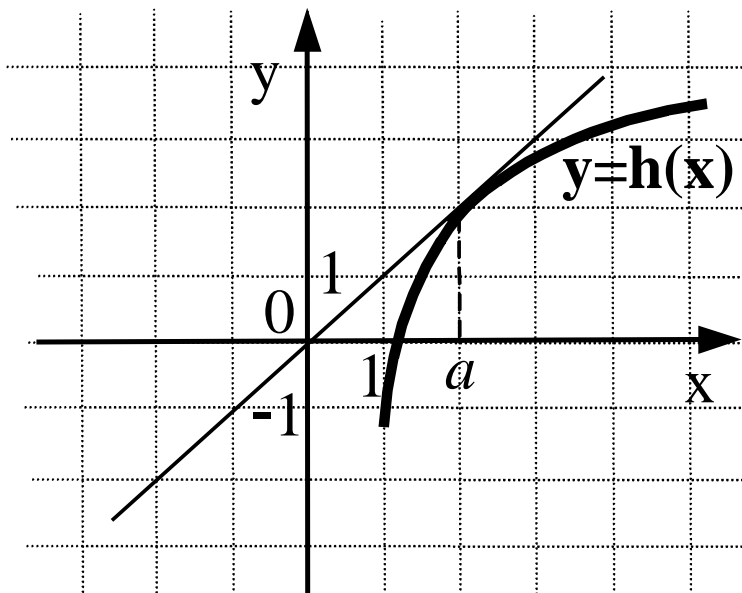
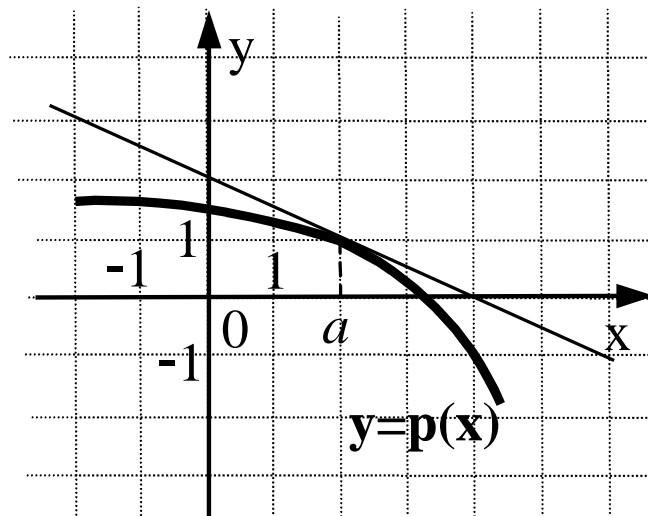
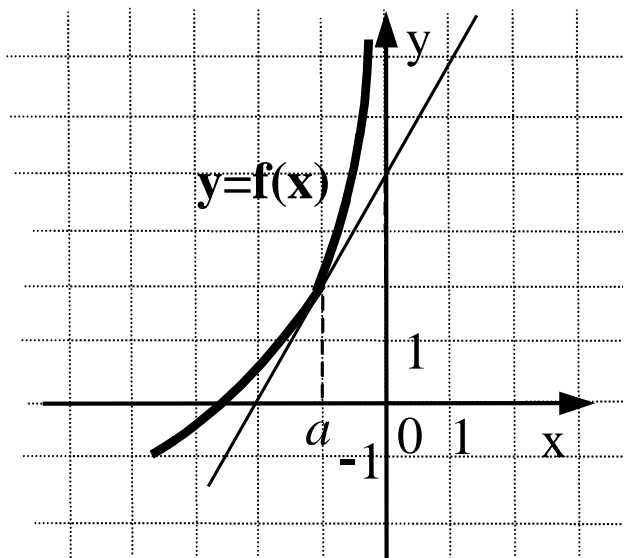
Знание углового коэффициента касательной к графику функции позволяет ответить на некоторые вопросы при исследовании этой функции.

Уравнение касательной (прямой) имеет вид $y = kx + b$, где k – угловой коэффициент, который характеризует угол, который образует прямая с положительным направлением оси Ox .

$$f'(x_0) = k$$



Укажите функцию, производная которой в точке a равна 1.



Промежутки монотонности функции

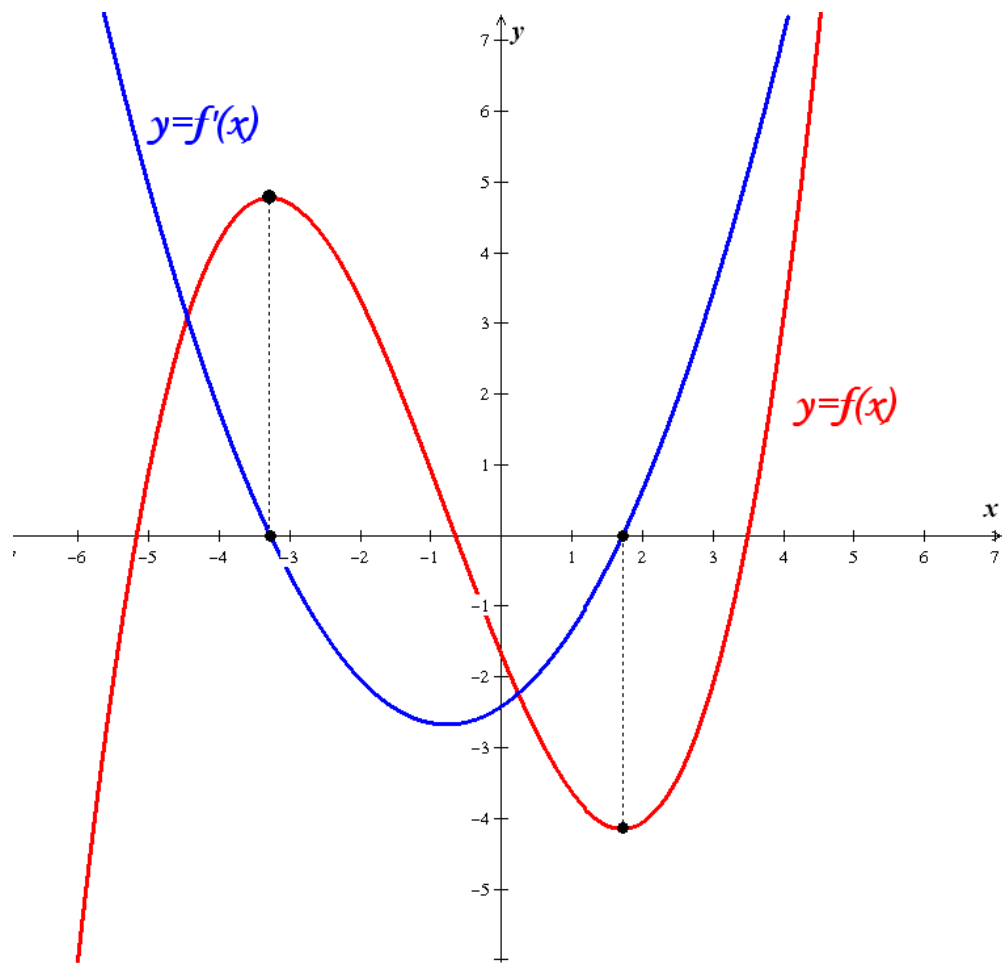
Промежутки монотонности функции – это промежутки оси x , на которых функция **возрастает** (промежутки возрастания) или **убывает** (промежутки убывания).

Геометрически – это интервалы оси x , где график функции идет вверх или вниз.

Если дифференцируемая функция **возрастает** на промежутке, то ее производная **неотрицательна** на этом промежутке.

Если дифференцируемая функция **убывает** на промежутке, то ее производная **неположительна** на этом промежутке.

Связь между свойствами функции и свойствами ее производной можно проиллюстрировать на их графиках в одной системе координат.



Достаточные условия возрастания и убывания функции

Достаточное условие возрастания функции:

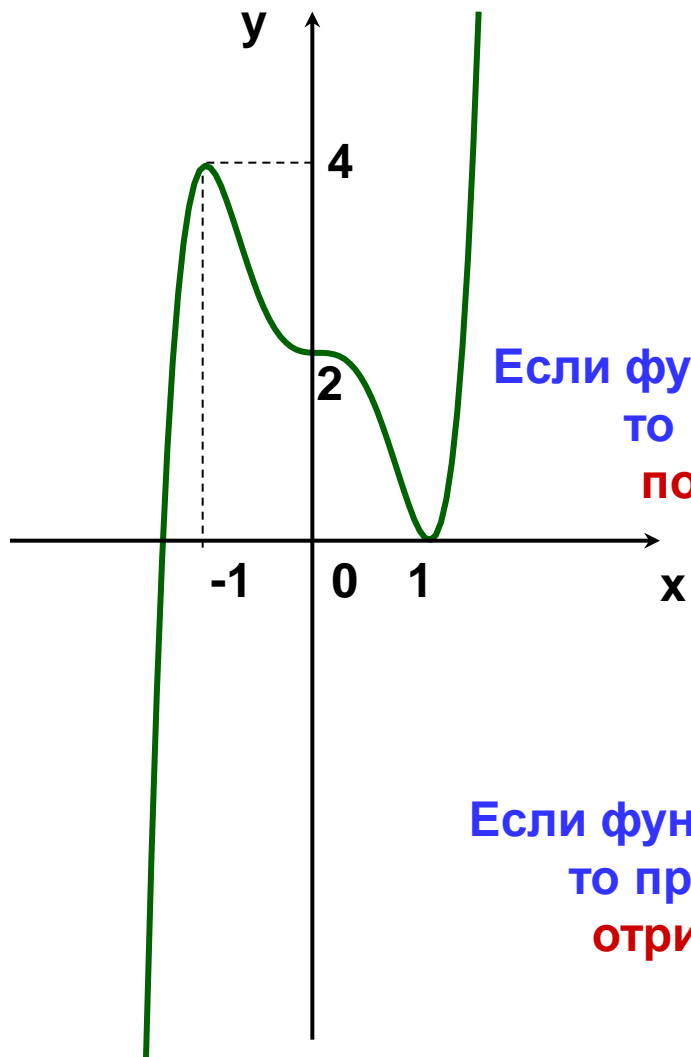
если в каждой точке интервала $(a;b)$ производная $f'(x) > 0$, то функция монотонно возрастает на этом интервале.

Достаточное условие убывания функции:

если в каждой точке интервала $(a;b)$ производная $f'(x) < 0$, то функция монотонно убывает на этом интервале.

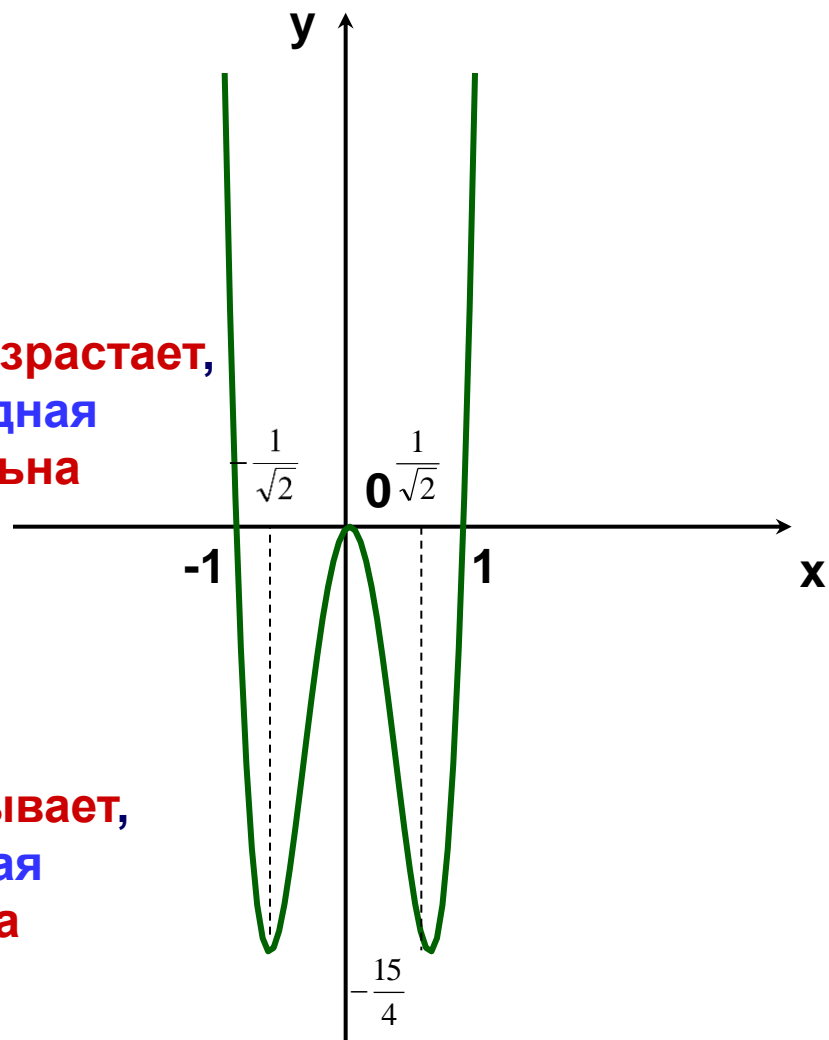
$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$$

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$



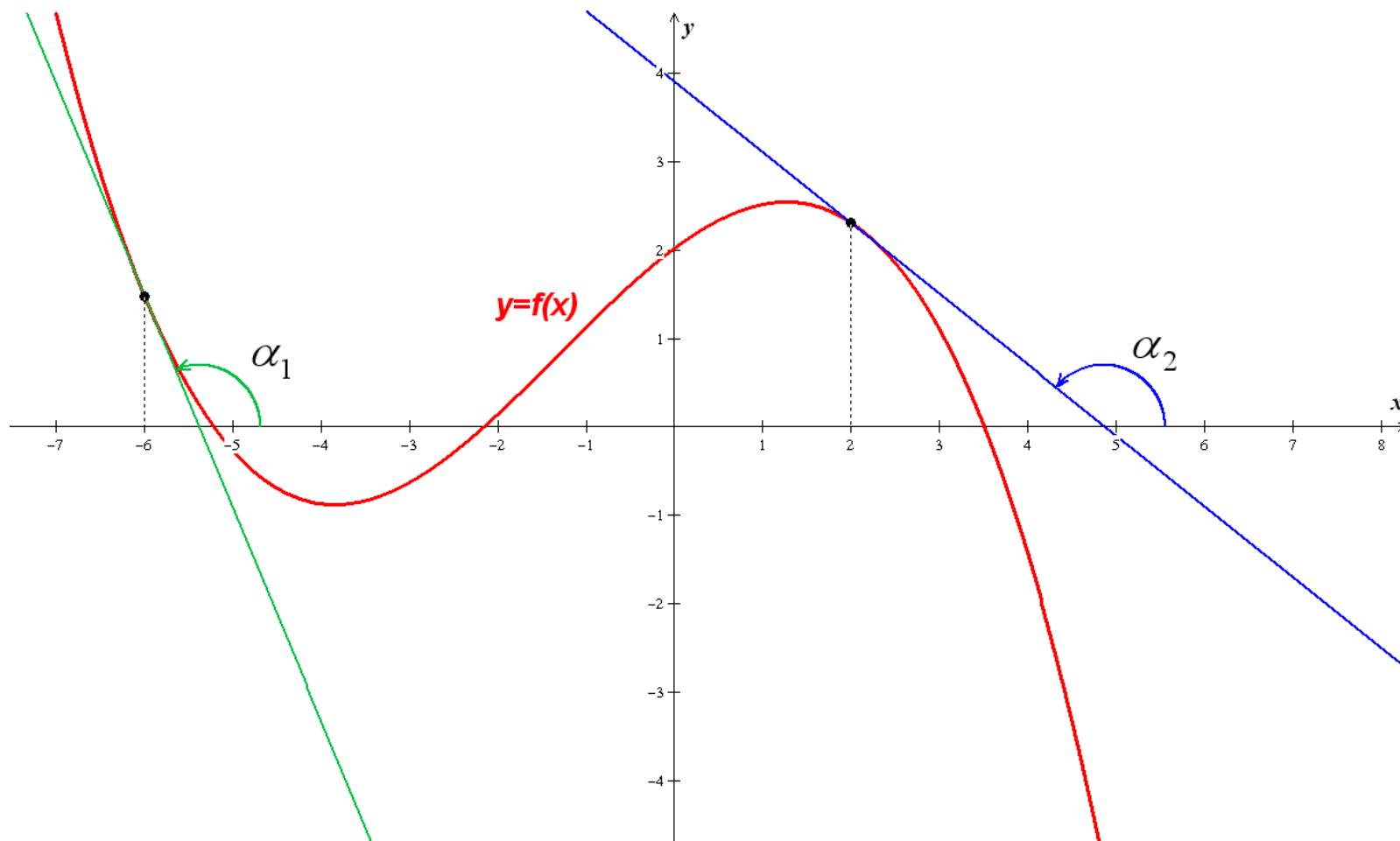
Если функция **возрастает**,
то производная
положительна

Если функция **убывает**,
то производная
отрицательна



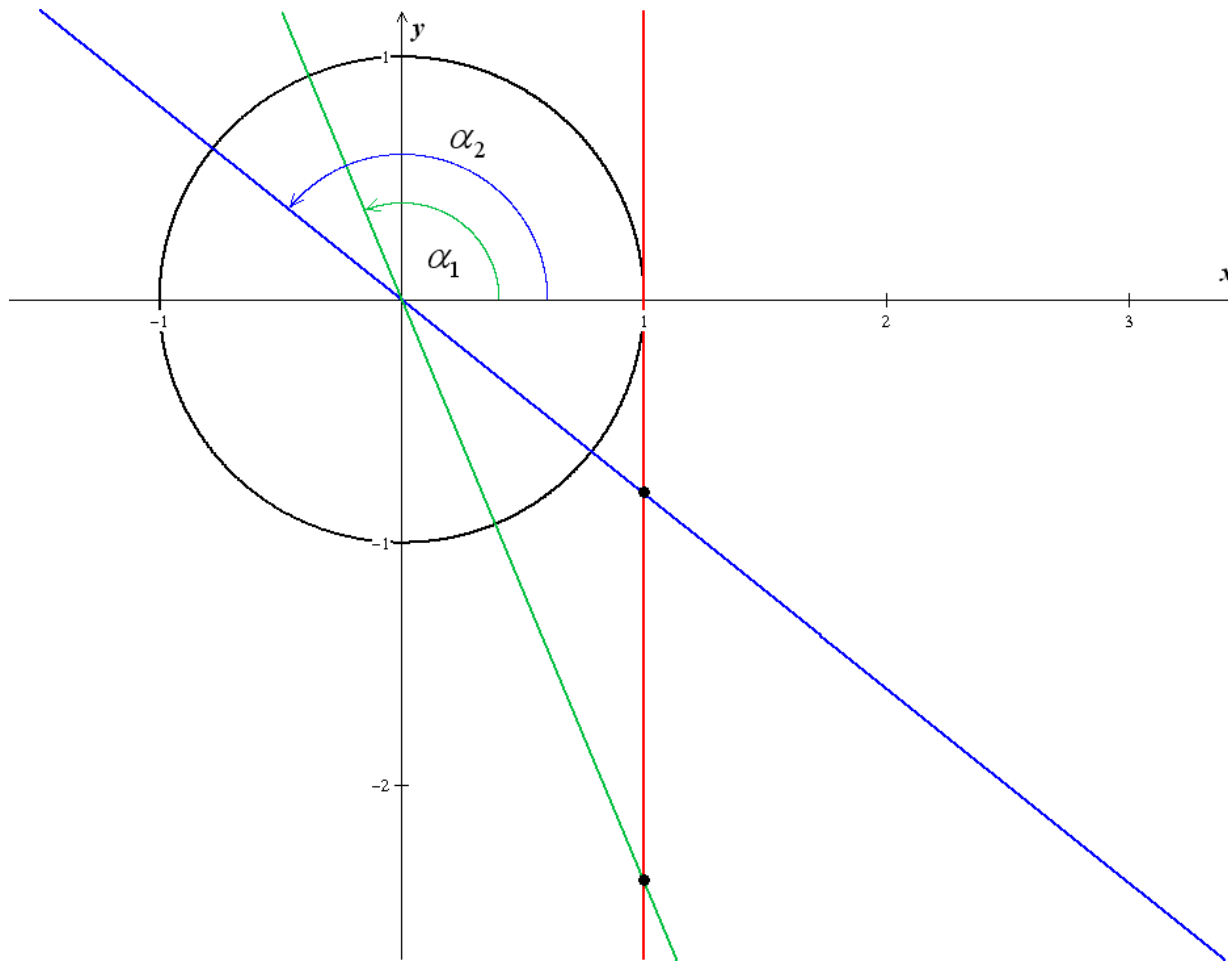
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки - 6 и 2.

В какой из этих точек значение производной наибольшее?



$\operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2$, следовательно, $f'(-6) < f'(2)$.

Ответ: 2.



Точки экстремума

Точки экстремума – точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает самое большое (максимум) или самое малое (минимум) значение по сравнению со значениями в близких точках.

Геометрически - в точках экстремума график функции выгибается вверх или вниз.

Необходимое условие экстремума функции. В точке экстремума функции её производная обращается в ноль или не существует.

Достаточное условие экстремума

Если в некоторой точке X_0 производная функции $f(x)$ обращается в нуль и, кроме того, проходя через неё слева направо, меняет свой знак с «+» на «-»,

то X_0 – точка **максимума** функции $f(x)$.

Если производная меняет знак с «-» на «+», то X_0 – точка **минимума** функции $f(x)$

Девиз урока

«Слушаю – забываю.

Смотрю – запоминаю.

Делаю – понимаю»

Конфуций.